

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

➤ VD MỞ ĐẦU:

a) Cho hàm số $f(x) = 3x^2$. Hàm số $F(x)$ nào sau đây không thỏa mãn $F'(x) = f(x)$

- A. $F(x) = x^3$. B. $x^3 + 2021$. C. $x^3 - 2004$. D. $3x^3 + 2x - 7$.

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$

- A. $F(x) = \tan x + \sqrt{10}$. B. $F(x) = 3x + \tan x + 2022$.

- C. $F(x) = 2 \cos x - 9$. D. $F(x) = -\cot x + 1221$.

➤ **Định nghĩa:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . (K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

➤ VD1:

a) Hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x$ trên $\mathbb{R}$ vì $F'(x) = (x^2)' = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

Định lý 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .

Định lý 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

➤ **Kí hiệu:** $\int f(x) dx = F(x) + C$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .

➤ **Chú ý:** $f(x) dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ vì $dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$.

➤ VD2:

a) Với $x \in \mathbb{R}$, $\int 2x dx = x^2 + C$.

b) Với $u \in (0; +\infty)$, $\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$.

c) Với $t \in \mathbb{R}$, $\int \cos t dt = \sin t + C$.

➤ **VD3:** Tính nguyên hàm của các hàm số sau:

- a) $\int x^4 dx$; b) $\int \cos x dx$; c) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$.

Lời giải

- a) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$;

b) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

c) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

➤ **Tính chất 1:** $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

➤ **Tính chất 2:** $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$, k là hằng số khác 0.

➤ **Tính chất 3:** $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

➤ **VD4:** Tính nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (\cos x)' dx$; b) $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} \right) dx$.

Lời giải

a) $\int (\cos x)' dx = \int (-\sin x) dx = \cos x + C$.

b) $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \int 3x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx = x^3 - \ln|x| + C$.

➤ **VD5:** Khẳng định nào đây **sai**?

A. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

C. $\int 2x dx = x^2 + C$.

D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \cos x dx = \sin x + C \Rightarrow A$ sai.

➤ **VD6:** Cho hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$. Khi đó:

A. $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + 5\ln x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \frac{5+2x^4}{x^2} dx = \int \left(\frac{5}{x^2} + 2x^2 \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$.

3. Sự tồn tại nguyên hàm

➤ **Định lý 3:** Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

➤ **VD7:**

a) Hàm số $f(x) = x^5$ có nguyên hàm trên các khoảng $(-\infty; +\infty)$ và $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

b) Hàm số $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ có nguyên hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$.

c) Hàm số $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm trên khoảng $(k\pi; (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

và $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0 dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

➤ **VD8:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.

Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int (e^x + 2x) dx = \int e^x dx + \int 2x dx = e^x + x^2 + C.$$

$$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}. F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$$

➤ **VD9:** Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3$ là

A. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

B. $2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}} + 3 \right) dx = 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{2}{3}} + 3x + C = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

a) Định lý 1:

Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

b) Hệ quả:

Với $u = ax + b$ ($a \neq 0$), ta có

$$\triangleright \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

$$\triangleright \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$\triangleright \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\triangleright \int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$$

$$\triangleright \int \alpha^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{\alpha^{ax+b}}{\ln \alpha} + C.$$

$$\triangleright \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$$

$$\triangleright \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$$

$$\triangleright \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$$

$$\triangleright \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$$

VD10: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (2x-3)^7 dx;$

b) $\int 3^{1-2x} dx;$

c) $\int \frac{1}{3+2x} dx;$

d) $\int e^{4-5x} dx;$

e) $\int \sin(3x-2) dx$

f) $\int \cos(3-4x) dx;$

g) $\int \frac{1}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} dx;$

h) $\int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)} dx.$

Lời giải

a) $\int (2x-3)^7 dx = \frac{1}{2.8} (2x-3)^8 + C = \frac{1}{16} (2x-3)^8 + C.$

b) $\int 3^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \frac{3^{1-2x}}{\ln 3} + C.$

c) $\int \frac{1}{3+2x} dx = \frac{1}{2} \ln|3+2x| + C.$

d) $\int e^{4-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{4-5x} + C.$

e) $\int \sin(3x-2) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x-2) + C.$

f) $\int \cos(3-4x) dx = \frac{-1}{4} \sin(3-4x) + C.$

g) $\int \frac{1}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{1}{2} \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

$$h) \int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)} dx = -\frac{1}{3} \cot\left(\frac{\pi}{3}-3x\right) + C.$$

➤ **Các bước tính nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số**

Bước 1: Đặt $t = u(x)$.

Bước 2: Tính $dt = u'(x) dx$.

Bước 3: Biến đổi $f(x) dx$ theo t và dt . Tính nguyên hàm mới theo t .

Bước 4: Thay $t = u(x)$ để được kết quả theo biến x .

2. Ví dụ minh họa

➤ **VD11:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$$a) I = \int x(x+2)^{2021} dx; \quad b) I = \int \frac{\ln x + 2}{x} dx.$$

Lời giải

a) Đặt $t = x + 2 \Rightarrow dt = dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int x(x+2)^{2021} dx = \int (t-2)t^{2021} dt = \int (t^{2022} - 2t^{2021}) dt \\ &= \frac{t^{2023}}{2023} - \frac{2t^{2022}}{2022} + C = \frac{(x+2)^{2023}}{2023} - \frac{2(x+2)^{2022}}{2022} + C. \end{aligned}$$

b) Đặt $t = \ln x + 2 \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

$$I = \int \frac{\ln x + 2}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x + 2)^2}{2} + C.$$

➤ **VD12:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$$a) I = \int \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2} dx.$$

$$b) I = \int \frac{3x + 3}{-x^2 - x + 2} dx.$$

$$c) I = \int \frac{(2x+1)}{x^2 + x + 1} dx.$$

Lời giải

$$a) I = \int \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2} dx = \int \left(x - \frac{3}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 - 3 \ln|x+2| + C.$$

$$\begin{aligned} b) I &= \int \frac{3x + 3}{-x^2 - x + 2} dx = \int \left(\frac{2}{1-x} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= -2 \ln|1-x| - \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

$$= -\ln(1-x)^2 - \ln|x+2| + C = -\ln\left[(1-x)^2(x+2)\right] + C.$$

c) Đặt $t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x+1) dx$.

$$\Rightarrow I = \int \frac{(2x+1)}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2 + x + 1) + C.$$

➤ **VD13:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } I_1 = \int \cos^{2021} x \sin x \, dx; \quad \text{b) } I_2 = \int \cos^3 x \, dx; \quad \text{c) } I_3 = \int \frac{\cos x}{9 - 2 \sin x} \, dx.$$

Lời giải

$$\text{a) Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx \Rightarrow \sin x \, dx = -dt.$$

$$I_1 = -\int t^{2021} \, dt = -\frac{t^{2022}}{2022} + C = -\frac{\cos^{2022} x}{2022} + C.$$

$$\text{b) } I_2 = \int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx.$$

$$I_2 = \int (1 - t^2) \, dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$\text{c) Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx.$$

$$I_3 = \int \frac{1}{9 - 2t} \, dt = -\frac{1}{2} \ln |9 - 2t| + C = -\frac{1}{2} \ln (9 - 2 \sin x) + C.$$

➤ **VD14:** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ biết $F(0) = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int \frac{1}{1+e^{-x}} \, dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1 + e^x \Rightarrow dt = e^x \, dx.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(e^x + 1) + C.$$

$$\text{Mà } F(0) = 2 \text{ nên suy ra } \ln 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 2 - \ln 2.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \ln(e^x + 1) + 2 - \ln 2.$$

➤ **VD15:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f'(x) = 2x \cdot e^{-f(x)}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x \cdot e^{-f(x)} \Rightarrow \frac{f'(x)}{e^{-f(x)}} = 2x.$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = 2x.$$

$$\Rightarrow \int e^{f(x)} f'(x) \, dx = \int 2x \, dx.$$

$$\Leftrightarrow \int e^{f(x)} f'(x) \, dx = x^2 + C_1 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = e^{f(x)} \Rightarrow dt = e^{f(x)} f'(x) \, dx.$$

$$\Rightarrow \int e^{f(x)} f'(x) \, dx = \int dt = t + C_2 = e^{f(x)} + C_2.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2 + C).$$

$$\text{mà } f(0) = 0 \Rightarrow \ln(C) = 0 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f(1) = \ln 2.$$

III. PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN:

1) Dấu hiệu: Tìm họ nguyên hàm $\int f(x)g(x)dx$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hai trong bốn hàm số sau lôgarit, đa thức, lượng giác, hàm mũ.

2) Công thức $\int u dv = uv - \int v du$.

3) Chú ý:

➤ Thứ tự ưu tiên u nhất lôgarit, nhì đa, ba mũ, tứ lượng.

➤ Phần còn lại đặt dv .

4) Ví dụ

➤ **VD16:** Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cos x$ là

A. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$.

B. $F(x) = -x \sin x - \cos x + C$.

C. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

D. $F(x) = -x \sin x + \cos x + C$.

Lời giải

Chọn C

Tìm $F(x) = \int x \cos x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Khi đó $F(x) = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$.

➤ **VD17:** Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x e^x$ là

A. $I = x e^x - e^x + C$. **B.** $I = x e^x + e^x + C$. **C.** $I = \frac{x^2}{2} e^x + C$. **D.** $I = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int x e^x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

Khi đó $F(x) = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$.

➤ **VD18:** Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ là

A. $F(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} + C$.

B. $F(x) = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2} + C$.

C. $F(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2} + C$.

D. $F(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } F(x) = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} + C.$$

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 100 - SGK: Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm còn lại?

a) e^{-x} và $-e^{-x}$; b) $\sin 2x$ và $\sin^2 x$; c) $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$ và $\left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x$.

Lời giải

a) e^{-x} và $-e^{-x}$ là nguyên hàm của nhau.

b) $\sin^2 x$ là một nguyên hàm của $\sin 2x$ vì $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

c) $\left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x$ là một nguyên hàm của $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$ vì

$$\left(\left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x\right)' = \frac{4}{x^2} e^x + \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x = \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x.$$

Bài 2 trang 101 - SGK: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$; b) $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$; c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$;
d) $f(x) = \sin 5x \cos 3x$; e) $f(x) = \tan^2 x$; g) $f(x) = e^{3-2x}$;
h) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$.

Lời giải

$$\text{a) } \int f(x) dx = \int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x}} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{7} x^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$\text{b) } \int f(x) dx = \int \frac{2^x - 1}{e^x} dx = \int \frac{2^x}{e^x} dx - \int \frac{1}{e^x} dx = \int \left(\frac{2}{e}\right)^x dx - \int e^{-x} dx.$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln \frac{2}{e}} + e^{-x} = \frac{\frac{2^x}{e^x}}{\ln 2 - 1} - \frac{1}{e^x} = \frac{2^x + \ln 2 - 1}{e^x (\ln 2 - 1)} + C.$$

$$\text{c) } \int f(x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = -\cot x + \tan x + C = -2 \cot 2x + C.$$

$$\text{d) } \int f(x) dx = \int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} \cos 8x + \cos 2x\right) + C.$$

$$\text{e) } \int f(x) dx = \int \tan^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + C.$$

$$g) \int f(x) dx = \int e^{3-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{3-2x} + C.$$

$$h) \int f(x) dx = \int \frac{1}{(1+x)(1-2x)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{1+x} dx + \int \frac{2}{1-2x} dx \right) \\ = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{1-2x} + C.$$

Bài 3 trang 101 – SGK: Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính:

a) $\int (1-x)^9 dx$ (đặt $u = 1-x$);

b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ (đặt $u = 1+x^2$);

c) $\int \cos^3 x \sin x dx$ (đặt $t = \cos x$);

d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$ (đặt $u = e^x + 1$).

Lời giải

a) Đặt $u = 1-x \Rightarrow du = -dx$.

Khi đó nguyên hàm cần tính trở thành $-\int u^9 du = -\frac{u^{10}}{10} + C$.

Vậy $\int (1-x)^9 dx = -\frac{(1-x)^{10}}{10} + C$.

b) Đặt $u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x dx$.

Khi đó nguyên hàm cần tính trở thành $\frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{5} u^{\frac{5}{2}} + C$.

Vậy $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C$.

c) Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Khi đó nguyên hàm cần tính trở thành $-\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + C$.

Vậy $\int \cos^3 x \sin x dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$.

d) Ta có $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2} = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1 + 2e^x} dx = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$.

Đặt $u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$

Khi đó nguyên hàm cần tính trở thành $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$.

$$\text{Vậy } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2} = -\frac{1}{e^x + 1} + C.$$

Bài 4 trang 101 – SGK: Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

- a) $\int x \ln(1+x) dx$; b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$;
c) $\int x \sin(2x+1) dx$; d) $\int (1-x) \cos x dx$.

Lời giải

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x} dx \\ v = \frac{x^2-1}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int x \ln(1+x) dx &= \frac{x^2-1}{2} \ln(1+x) - \int \frac{x^2-1}{2} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{x^2-1}{2} \ln(1+x) - \int \frac{x-1}{2} dx = \frac{x^2-1}{2} \ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \int x \ln(1+x) dx = \frac{x^2-1}{2} \ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} u = x^2 + 2x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+2) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (x^2 + 2x - 1)e^x - \int (2x+2)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \int (2x+2)e^x dx &= (2x+2)e^x - \int 2e^x dx \\ &= (2x+2)e^x - 2e^x + C = 2xe^x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (x^2 - 1)e^x + C.$$

$$\text{c) Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2x+1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int x \sin(2x+1) dx &= -\frac{x}{2} \cos(2x+1) + \int \frac{1}{2} \cos(2x+1) dx \\ &= -\frac{x}{2} \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \int x \sin(2x+1) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C.$$

d) Đặt $\begin{cases} u = (1-x) \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Khi đó $\int (1-x) \cos x \, dx = (1-x) \sin x + \int \sin x \, dx$
 $= (1-x) \sin x - \cos x + C$.

Vậy $\int (1-x) \cos x \, dx = (1-x) \sin x - \cos x + C$.

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$ với $k \in \mathbb{R}$.

B. $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ với $\alpha \neq -1$.

D. $\left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$ với $k \in \mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 2: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 \, dx$.

A. $F(x) = \frac{\pi^3}{3} + C$.

B. $F(x) = 2\pi x + C$.

C. $F(x) = \pi^2 x + C$.

D. $F(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int \pi^2 \, dx = \pi^2 x + C$ (vì π^2 là hằng số).

Câu 3: [Mức độ 1] Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$.

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức nguyên hàm ta có $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 4: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x^2}$ là

A. $\frac{2x\sqrt[3]{x}}{4} + \frac{9x\sqrt{x^2}}{8} + C$.

B. $\frac{5x\sqrt{x}}{3} + \frac{27x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C$.

C. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{9x^2\sqrt[3]{x}}{5} + C.$

D. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C.$

Lời giải

Ta có $\int (\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x^2}) dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3 \cdot \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C.$

Chọn D

Câu 5: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

A. $e^x + x^2 + C.$

B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

D. $e^x + 1 + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (e^x + x) dx = e^x + \frac{x^2}{2} + C.$

Câu 6: [Mức độ 1] Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $2x^2 + 6x + C.$

B. $x^2 + 6x + C.$

C. $2x^2 + C.$

D. $x^2 + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (2x + 6) dx = 2 \frac{x^2}{2} + 6x + C = x^2 + 6x + C$ (C là hằng số).

Câu 7: [Mức độ 2] $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ thỏa mãn $F(1) = 9$ là:

A. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2.$

B. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 10.$

C. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x.$

D. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 10.$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$F(x) = \int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 2) dx = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + C$$

$$F(1) = 9 \Leftrightarrow 1^4 - 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + C = 9 \Leftrightarrow C = 10 \Rightarrow F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 10$$

Câu 8: [Mức độ 2] Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ biết $F(1) = 0$.

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C.$$

$$F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1^2}{2} + \frac{1}{1} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}.$$

Vậy $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$.

Câu 9: [Mức độ 3] Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$.

- A.** $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C$. **B.** $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.
C. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$. **D.** $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$$

Câu 10: [Mức độ 3] Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là

- A.** $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3$. **B.** $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^2$.
C. $F(x) = \frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$. **D.** $F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int x\sqrt{1+x^2} dx$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow t dt = x dx$.

Khi đó $I = \int t t dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$.

Suy ra $I = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3 + C$.

Câu 11: [Mức độ 3] Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$.

- A.** $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$. **B.** $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$.

Do đó $\int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

Vậy $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

Câu 13. [Mức độ 2] Tìm $\int e^x \sin x dx$ bằng đặt $u = e^x$ và $dv = \sin x dx$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$

B. $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$

C. $\int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$

D. $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x \, dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$

Ta có $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$

Câu 12: [Mức độ 2] Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \sin x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2022.$

A. $F(x) = x \sin x + \cos x + 2022.$

B. $F(x) = \sin x - x \cos x + 2021.$

C. $F(x) = x \sin x - \cos x + 2022.$

D. $F(x) = -x \sin x - \cos x + 2020.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int x \sin x \, dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$

Khi đó $F(x) = \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x + C.$

Lại có $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2021 \Rightarrow 1 + C = 2022 \Leftrightarrow C = 2021.$

Vậy $F(x) = \sin x - x \cos x + 2021.$

Câu 13: [Mức độ 2] Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \ln x$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$

B. $F(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$

D. $F(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int x \ln x \, dx.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$

Khi đó $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$.

Câu 14: [Mức độ 3] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$.
Tính $F(1)$.

- A.** $F(1) = 11e - 3$. **B.** $F(1) = e + 3$. **C.** $F(1) = e + 7$. **D.** $F(1) = e + 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int (5x+1)e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 5x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $F(x) = (5x+1)e^x - \int 5e^x dx = (5x+1)e^x - 5e^x + C$.

Mặt khác $F(0) = 3 \Leftrightarrow -4 + C = 3 \Leftrightarrow C = 7$.

Suy ra $F(x) = (5x-4)e^x + 7$.

Vậy $F(1) = e + 7$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 15: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

- A.** $4x^4 + C$. **B.** $3x^2 + C$. **C.** $x^4 + C$. **D.** $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Câu 16: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A.** $\sin x + 3x^2 + C$. **B.** $-\sin x + 3x^2 + C$. **C.** $\sin x + 6x^2 + C$. **D.** $-\sin x + C$.

Câu 17: [Mức độ 1] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- A.** $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$. **B.** $3x^2 + 1 + C$. **C.** $x^3 + x + C$. **D.** $x^4 + x^2 + C$.

Câu 18: [Mức độ 1] Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- A.** $x^2 + 3x + C$. **B.** $2x^2 + 3x + C$. **C.** $x^2 + C$. **D.** $2x^2 + C$.

Câu 19: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Câu 20: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C.$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C.$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C.$

Câu 21: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C.$

Câu 22: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C.$

B. $\frac{1}{3} e^{3x} + C.$

C. $\frac{1}{3} e^x + C.$

D. $3e^{3x} + C.$

Câu 23: [Mức độ 1] Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

A. $2e^{2x-1} + C.$

B. $e^{2x-1} + C.$

C. $\frac{1}{2} e^{2x-1} + C.$

D. $\frac{1}{2} e^x + C.$

Câu 24: [Mức độ 2] Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C.$

B. $2e^x - \tan x + C.$

C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C.$

D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C.$

Câu 25: [Mức độ 2] Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $x + 3 \ln(x-1) + C.$

B. $x - 3 \ln(x-1) + C.$

C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

D. $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

Câu 26: [Mức độ 2] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn

$F(e+1) = 4$. Tìm $F(x)$.

A. $2 \ln(x-1) + 2.$

B. $\ln(x-1) + 3.$

C. $4 \ln(x-1).$

D. $\ln(x-1) - 3.$

Câu 27: [Mức độ 2] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm

$F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

Câu 28: [Mức độ 2] Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3.$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1.$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3.$

Câu 29: [Mức độ 2] Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- A.** $2e^x + 2x^2 + C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C.$ **C.** $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C.$ **D.** $e^{2x} + 4x^2 + C.$

Câu 30: [Mức độ 3] Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}.$

- A.** $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C.$
B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$
D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C.$

Câu 31: [Mức độ 3] Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- A.** $\int 2(u^2 - 4) du.$ **B.** $\int (u^2 - 4) du.$ **C.** $\int (u^2 - 3) du.$ **D.** $\int 2u(u^2 - 4) du.$

Câu 32: [Mức độ 3] Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cos x$ và $F(0) = \pi.$

Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right).$

- A.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi.$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$

Câu 33: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}.$ Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x.$ Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

- A.** $-\sin 2x + \cos 2x + C.$ **B.** $-2\sin 2x + \cos 2x + C.$
C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C.$ **D.** $2\sin 2x - \cos 2x + C.$

Câu 34: [Mức độ 3] Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

- A.** $F(x) = x \cos x + \sin x + C.$ **B.** $F(x) = x \cos x - \sin x + C.$
C. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C.$ **D.** $F(x) = -x \cos x + \sin x + C.$